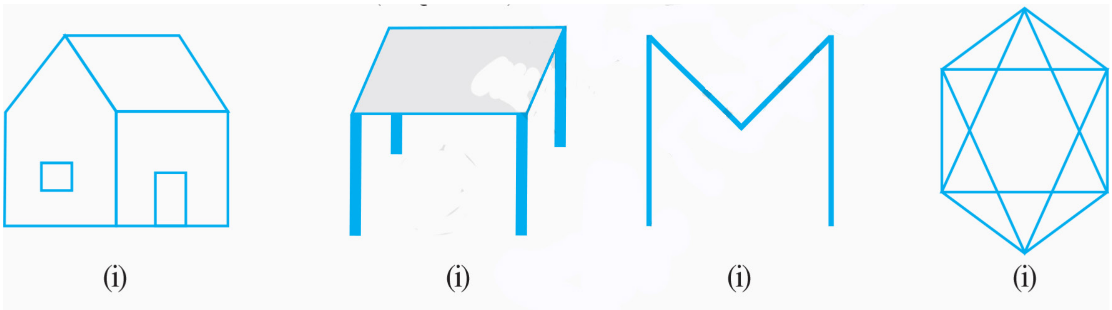
रेखाः एवञ्च कोणाः

अध्यायः 5

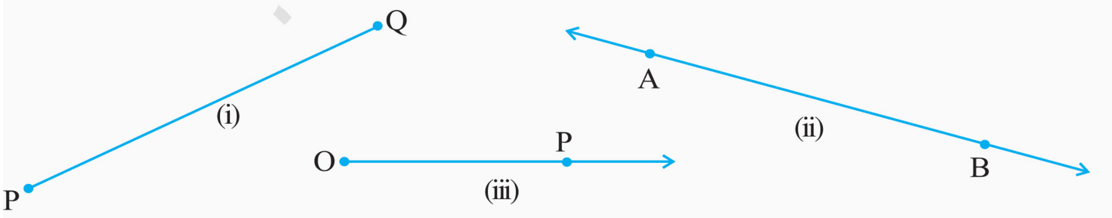
5.1 रेखा

भवन्तः पूर्वतः एव जानन्ति यत् कस्मिंश्चित् प्रदत्ते आकारे विभिन्न-रेखाणां, रेखाखण्डानाम् एवञ्च कोणानाम् अभिज्ञानं कथं क्रियते। किं भवन्तः निम्नलिखितासु आकृतिषु विभिन्न-रेखाखण्डानां तथा च कोणानां ज्ञानं कर्तुम् अर्हन्ति (आकृतिः 5.1)।



आकृतिः 5.1

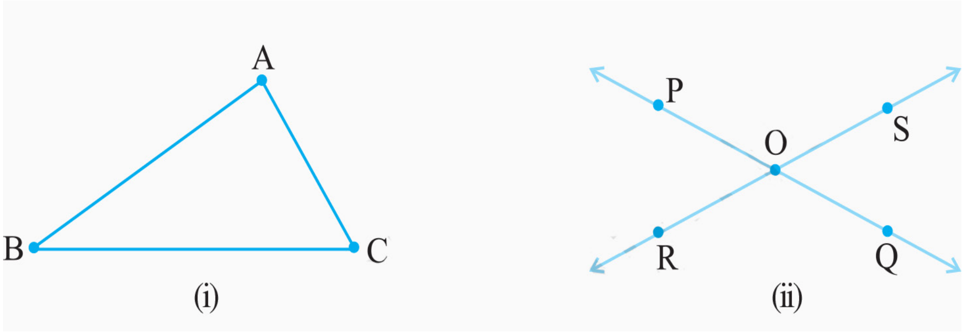
किं भवन्तः एतत् ज्ञातुं शक्नुवन्ति यत् निर्मितकोणः न्यूनकोणः अथवा अधिककोणः अथवा समकोणः अस्ति ? स्मरन्तु यद् एकस्य रेखाखण्डस्य द्वौ अन्तबिन्दू भवतः। यदि वयम् एतौ अन्तबिन्दू स्वदिशं प्रति अपरिमितरूपेण वर्धयामः तदा वयम् एकां रेखां प्राप्नुमः। अनेन प्रकारेण वयं वक्तुं शक्नुमः यद् कस्यापि रेखायाः कश्चन अपि अन्तिमः बिन्दुः न भवति। अपरस्मिन् पक्षे स्मरन्तु यत् किरणस्य एकः अन्तिमः बिन्दुः (नाम्ना प्रारम्भिक-बिन्दुः) भवति। उदाहरणार्थम् अधः प्रदत्ताः आकृतीः पश्यन्तु।



आकृति 5.2

अत्र आकृतिः 5.2 (i) रेखाखण्डम्, आकृतिः 5.2 (ii) रेखाम् एवञ्च आकृतिः 5.2 (iii) एकं किरणं, दर्शयति। सामान्यतः वयम् PQ इति एकं रेखाखण्डं ($\overline{PQ}$), इति सङ्केतेन, AB इति रेखाम् ($\overleftrightarrow{AB}$), इति सङ्केतेन एवञ्च OP इति किरणम् ($\overrightarrow{OP}$), इति सङ्केतेन निर्दिशामः। स्वकीय-दैनिकजीवनात् रेखाखण्डानां तथा च किरणानां कानिचित् उदाहरणानि यच्छन्तु तेषां च विषये निजमित्रैः सह चर्चां कुर्वन्तु।

पुनः स्मरन्तु यत् रेखाणाम् एवञ्च रेखाखण्डानां मेलनेन कोणः निर्मीयते। उपर्युक्तासु आकृतिषु (आकृतिः 5.1) कोणानां (corners) प्रेक्षणं कुर्वन्तु। यदा द्वे रेखे अथवा द्वौ रेखाखण्डौ कस्मिंश्चिद् बिन्दौ प्रतिच्छेदं कुरुतः तदा कोणानां निर्माणं जायते। उदाहरणार्थम् अधः प्रदत्ताः आकृतीः अवलोकयन्तु।



आकृतिः 5.3

प्रयासं कुर्वन्तु

स्वस्य निकटस्थानां दशानाम् आकृतीनां सूचीबन्धनं कुर्वन्तु तासु च विद्यमानानां न्यूनकोणानाम् अधिककोणानाम् एवञ्च समकोणानाम् अभिज्ञानं कुर्वन्तु।

5.3 (i) इति आकृत्याम् AB एवञ्च BC इति रेखाखण्डौ ABC इति कोणस्य निर्माणाय अन्योन्यम् B इत्यस्मिन् बिन्दौ प्रतिच्छेदं कुर्वतः तथा च BC एवञ्च AC इति रेखाखण्डौ ACB इति कोणस्य निर्माणाय अन्योन्यम् C इत्यस्मिन् बिन्दौ प्रतिछेदं कुरुतः इत्यादिः। यद्यपि 5.3 (ii) इत्यस्याम् आकृत्याम् PQ एवञ्च RS इति रेखे परस्परम् O इत्यस्मिन् बिन्दौ प्रतिछेदं कुरुतः यस्मिन् POS, SOQ, QOR तथा च ROP निर्मिताः भवन्ति।

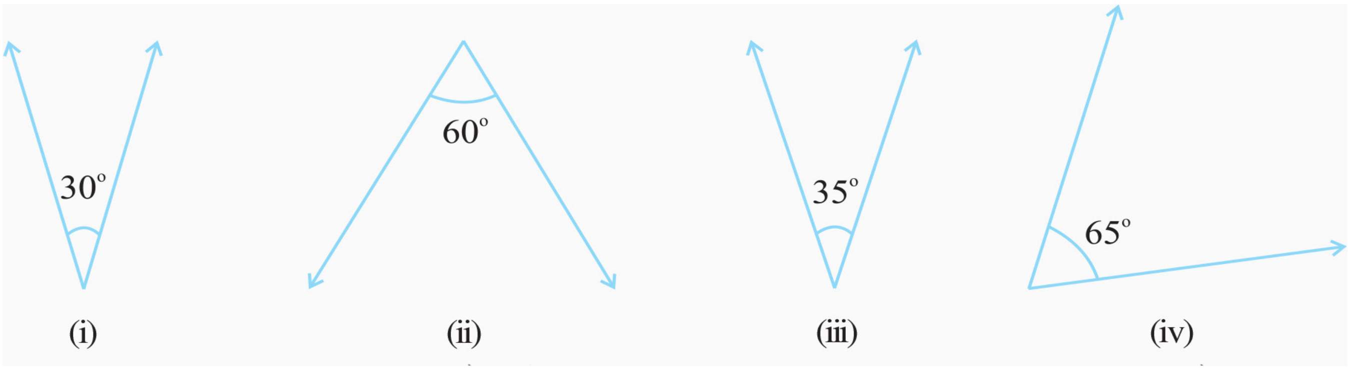
ABC इति कोणः $\angle$ABC इति सङ्केतेन निरूप्यते। अनेन प्रकारेण 5.3(i) इति आकृत्याम् $\angle$ABC, $\angle$BCA तथा च $\angle$BAC इति त्रयः कोणाःसन्ति तथा च 5.3 (ii) इति आकृत्याम् $\angle$POS, $\angle$SOQ, $\angle$QOR तथा च $\angle$POR इति चत्वारः कोणाः सन्ति। भवन्तः पूर्वम् एव पठितवन्तः यत् न्यूनकोणस्य, अधिककोणस्य समकोणस्य च रूपेषु कोणानां वर्गीकरणं कथं क्रियते।

टिप्पणी ABC इति कोणस्य माप-सन्दर्भे, m$\angle$ABC इत्येतं साधारणतः $\angle$ABC इत्यनेन रूपेण लेखिष्यामः। प्रकरणेन एतत् स्पष्टं भविष्यति यद् वयं कोणस्य अथवा अस्य मापसन्दर्भे वार्तां कुर्वन्तः स्मः।

5.2 सम्बन्धिताः कोणाः

5.2.1 पूरकः कोणः

यदा द्वयोः कोणयोः मापस्य योगः 90°इति भवति तदा एतौ कोणौ पूरककोणौ (complementary angles) इति कथ्येते।



किम् एतौ कोणौ पूरककोणौ स्तः ? आम् आकृतिः 5.4 किम् एतौ कोणौ पूरककोणौ स्तः ? न

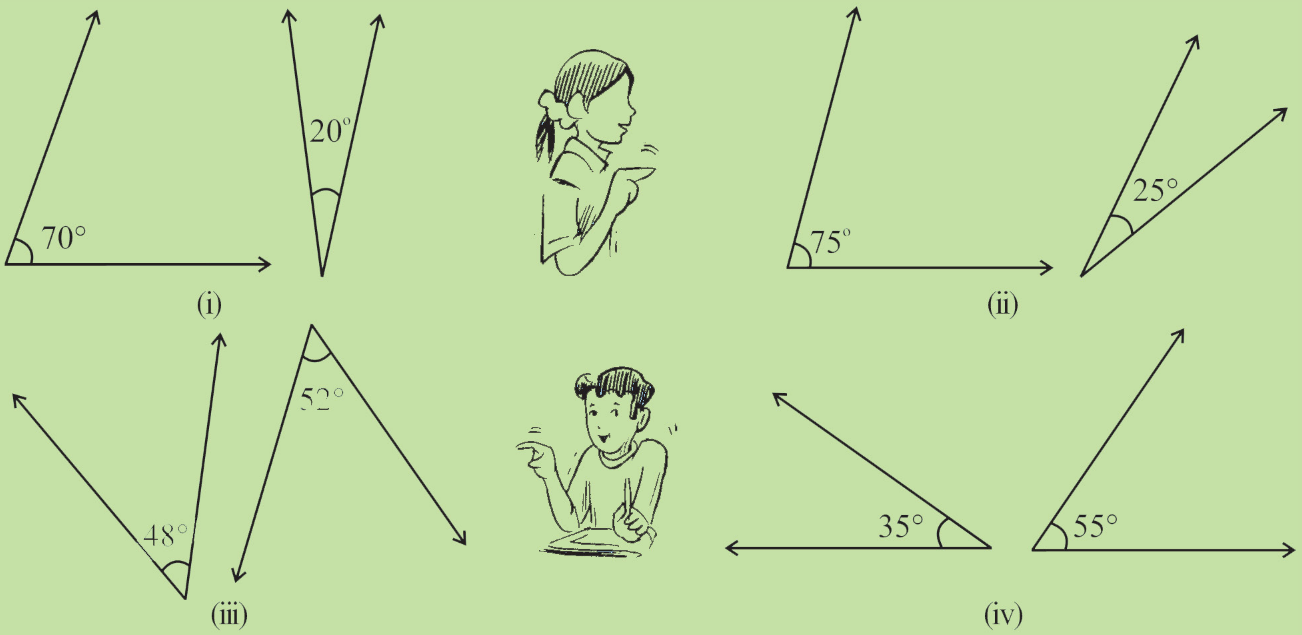
यदा द्वौ कोणौ पूरकः भवतः तदा एतयोः प्रत्येकं कोणः अपरकोणस्य पूरकः इति कथ्यते। उपर्युक्तारेखे (आकृतिः 5.4) ‘‘30°इति कोणः’’,‘‘60°इत्यस्य कोणस्य’’ पूरकः विलोमतः च अस्ति।

विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

1. किं द्वौ न्यूनकोणौ परस्परं पूरकौ भवितुम् अर्हतः ?
2. किं द्वौ अधिककोणौ परस्परं पूरकौ भवितुम् अर्हतः ?
3. किं द्वौ समकोणौ परस्परं पूरकौ भवितुम् अर्हतः?

प्रयासं कुर्वन्तु

1. निम्नलिखितेषु कोण-युग्मेषु कतमाः पूरकाः सन्ति ? (आकृतिः 5.5)

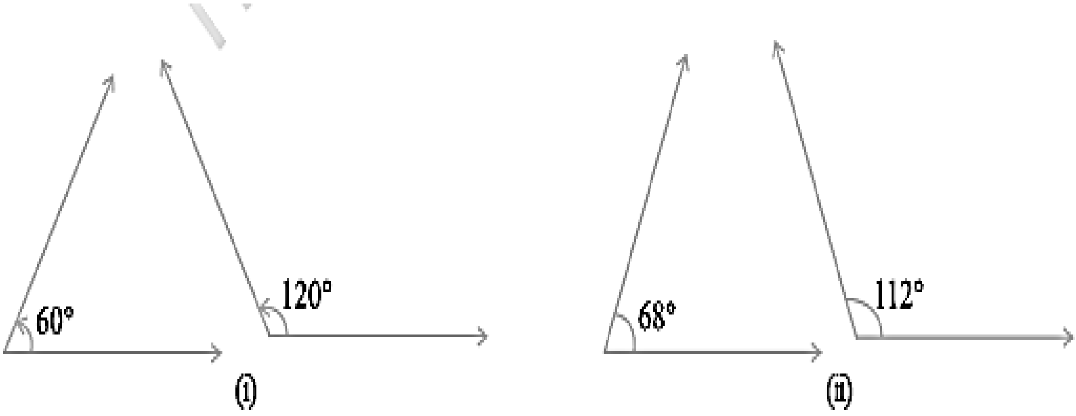


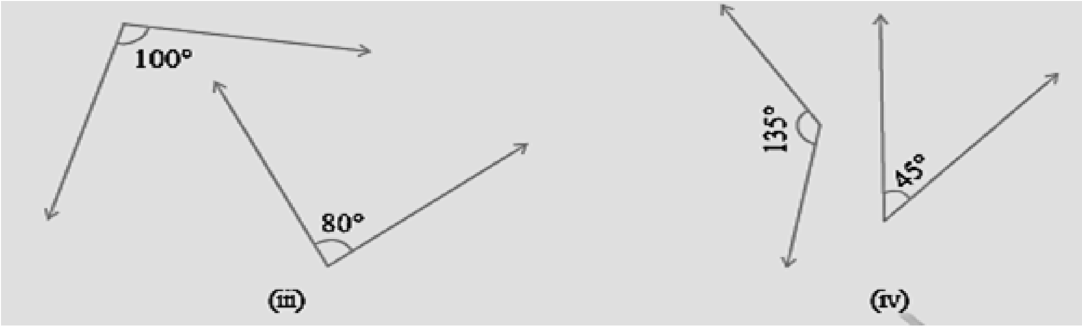
आकृतिः 5.5

2. निम्नलिखितेषु कोणेषु प्रत्येकं पूरकस्य मापः कः अस्ति ?
(i) 45° (ii) 65° (iii) 41° (iv) 54°
3. द्वयोः पूरककोणयोः मापस्य अन्तरम् 12°इति अस्ति। कोणयोः मापः ज्ञायताम्।

5.2.2 सम्पूरक-कोणः

आयान्तु कोणानां निम्नलिखितान् युग्मान् पश्यामः (आकृतिः 5.6):





आकृतिः 5.6

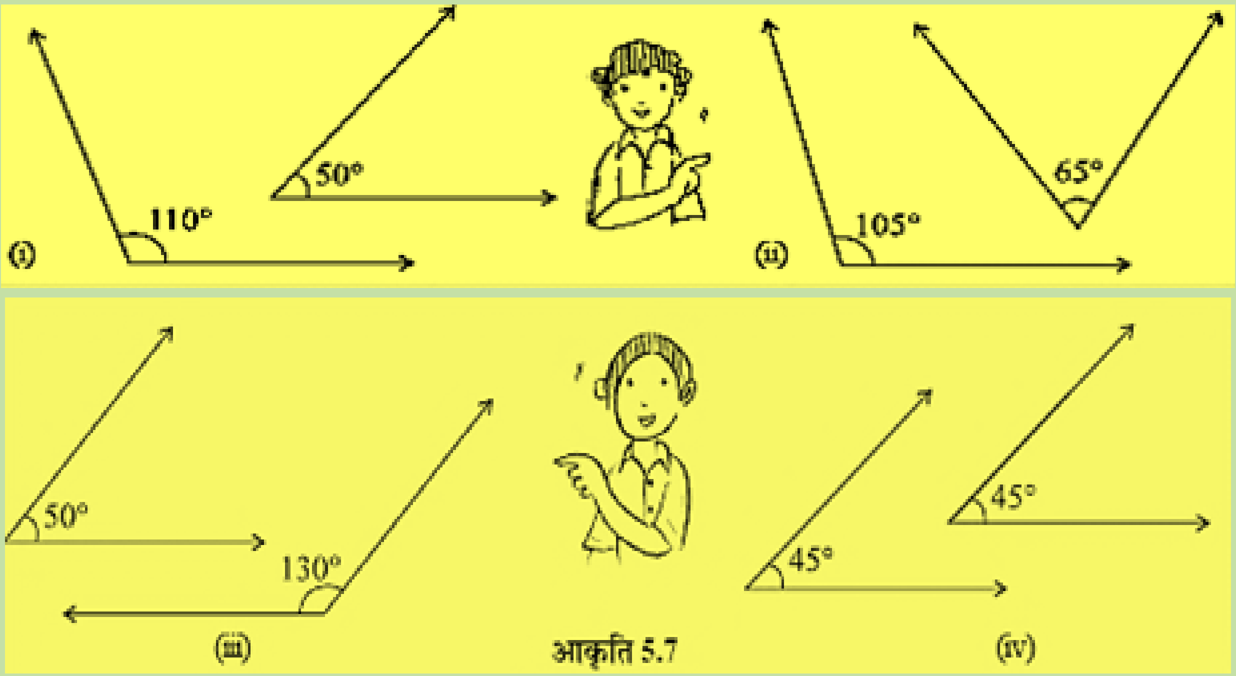
किं भवन्तः पश्यन्ति यत् प्रत्येकम् उपर्युक्त-युग्मे (5.6 इति आकृत्याम्) कोणमापानां योगः 180° इति प्राप्यते ? कोणानाम् एतादृशाः युग्माः सम्पूरककोणाः (supplementary angles) इति कथ्यन्ते। यदा द्वौ कोणौ सम्पूरकौ भवतः तदा तन्मध्यवर्ती प्रत्येकं कोणः अपरस्य कोणस्य सम्पूरकः इति कथ्यते।

विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

1. किं द्वौ अधिककोणौ सम्पूरक-कोणौ भवितुम् अर्हतः?
2. किं द्वौ न्यूनकोणौ सम्पूरक-कोणौ भवितुम् अर्हतः?
3. किं द्वौ समकोणौ सम्पूरक-कोणौ भवितुम् अर्हतः?

प्रयासं कुर्वन्तु

5.7 इति आकृत्यां सम्पूरकोणानां युग्मान् ज्ञातुं प्रयासं कुर्वन्तु :



आकृति 5.7

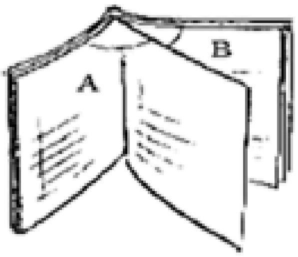
2. निम्नलिखितेषु कोणेषु प्रत्येकं सम्पूरकस्य मापः किं भविष्यति ?

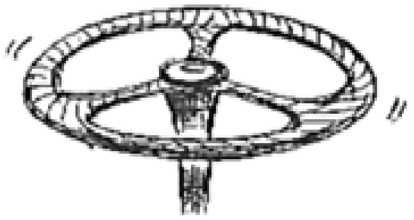
   (i) 100° (ii) 90° (iii) 55° (iv) 125°

3. द्वयोः सम्पूरककोणयोः बृहत्-कोणस्य मापः लघु-कोणस्य मापात् 44° अधिकम् अस्ति। कोणयोः मापः ज्ञायताम्।

5.2.3. आसन्नकोणः

निम्नलिखिताः आकृतीः पश्यन्तु





यदा भवन्तः एकं पुस्तकम् उद्घाटयन्ति तदा उपर्युक्ता आकृतिः दृश्यते । A तथा च B मध्ये वयं कोणानाम् एतादृशं युग्मं प्राप्नुमः यस्मिन् एकः कोणः अपरकोणेन सह संलग्नः अस्ति ।	कस्यचित् कारयानस्य स्टीयरिंगचक्रं (अरित्रचक्रम्) पश्यन्तु । केन्द्रबिन्दौ त्रयः कोणाः विद्यन्ते येषु प्रत्येकम् अपरेण सह संलग्नम् अस्ति।

आकृतिः 5.8

A तथा च B इति द्वयोः शीर्षयोः उपरि वयं प्राप्नुमः यत् कोणानाम् एकः युग्मः अपरयुग्मेन सह संलग्नः वर्तते। एते कोणाः एवं सन्ति :

(i) तेषाम् एकम् उभयनिष्ठं शीर्षम् अस्ति

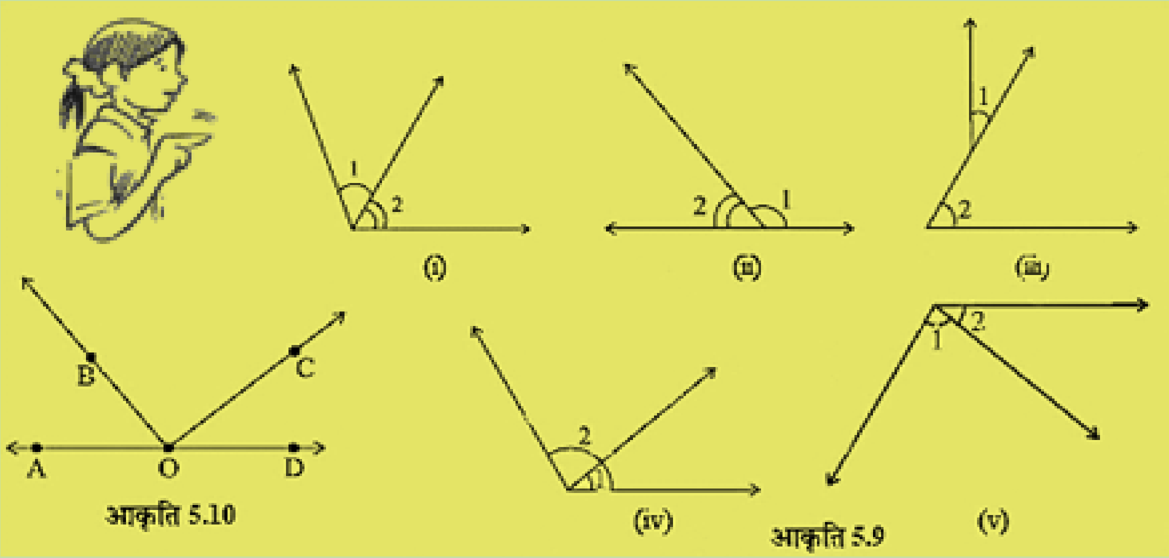
(ii) तेषु एका उभयनिष्ठः भुजः अस्ति तथा च

(iii) ते भुजाः उभयनिष्ठाः न सन्ति , भुजाः उभयनिष्ठभुजस्य एकस्मिन् पक्षे सन्ति ।

प्रयासं कुर्वन्तु

1.किम् 1 तथा च 2 इत्यनेन अङ्कितौ कोणौ आसन्नौ स्तः ?

[आकृतिः5.9(i) -(v)] यदि एतौ आसन्नौ न स्तः तदा उच्यताम्, किमर्थम् ?



आकृति 5.10 आकृति 5.9

2. 5.10 आकृत्यां, किं निम्नलिखिताः कोणाः आसन्नाः सन्ति ?

(a) ∠AOB तथा च ∠BOC (b) ∠BOD तथा च ∠BOC स्वीयोत्तरस्य पुष्टिं कुर्वन्तु ।

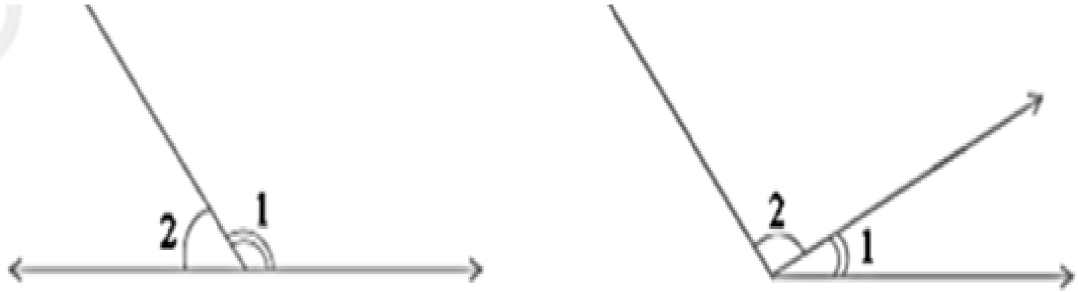
विचारयन्तु चर्चयन्तु लिखन्तु च

विचारयन्तु चर्चयन्तु एवञ्च लिखन्तु

1. किं द्वौ आसन्नकोणौ संपूरकौ भवितुम् अर्हतः ?
2. किं द्वौ आसन्नकोणौ पूरकौ भवितुम् अर्हतः ?
3. किं द्वौ अधिककोणौ आसन्नौ भवितुम् अर्हतः ?
4. किम् एकः न्यूनकोणः, अधिककोणस्य आसन्नः भवितुम् अर्हति ?

5.2.4 रैखिकयुग्मः

एकः रैखिकयुग्मः (linear pair) एतादृशानाम् आसन्नकोणानां युग्मः भवति येषां भुजाः अनुभयनिष्ठाः न सन्ति, विपरितदिशि विद्यमानाः किरणाः किरणाः भवन्ति।



(i) किम् $\angle 1$, $\angle 2$ इति एकः रैखिकः युग्मः अस्ति ? आम्

(ii) किम् $\angle 1$, $\angle 2$ इति एकः रैखिकः युग्मः अस्ति ? नास्ति (किमर्थम्)

आकृतिः 5.11

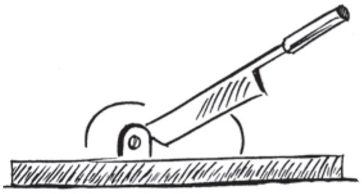
5.11 (i) इति उपर्युक्तायाम् आकृत्यां पश्यन्तु यत् सम्मुखाः किरणाः (याः $\angle 1$ तथा च $\angle 2$ इत्येतयोः उभयनिष्ठाः भुजाः न सन्ति) एकस्याः रेखायाः निर्माणं कुर्वन्ति। अनेन प्रकारेण $\angle 1 + \angle 2$ एतयोः मानं $180°$ इति जायते।

रैखिकयुग्मस्य कोणाः सम्पूरकाः भवन्ति।

किं भवद्भिः स्वपरिवेशे युग्मानां प्रतिरूपाणि दृष्टानि ?

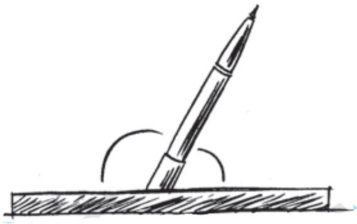
अवधानेन अङ्कयन्तु यत् सम्पूरक-कोणानां युग्मः रैखिक-युग्मः तदैव जायते यदा प्रत्येकम् अपरस्य निकटे स्थापयेत।

किं भवन्तः स्वकीये दैनिक-जीवने रैखिकयुग्मस्य उदाहरणानि पश्यन्ति ? शाककर्तन-पट्टम् (आकृतिः 5.12) पश्यन्तु। किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् क्षुरपत्रम् आधारफलकेन सह रैखिकयुग्मं निर्माति ?



एकः शाककर्तनपट्टमः

क्षुरपत्रम् आधारेण सह कोणानां रैखिक-युग्मं निर्माति।



एकः लेखन्याः स्थापकः

लेखनीस्थापकेन सह कोणानां रैखिक-युग्मं निर्माति।

आकृतिः 5.12

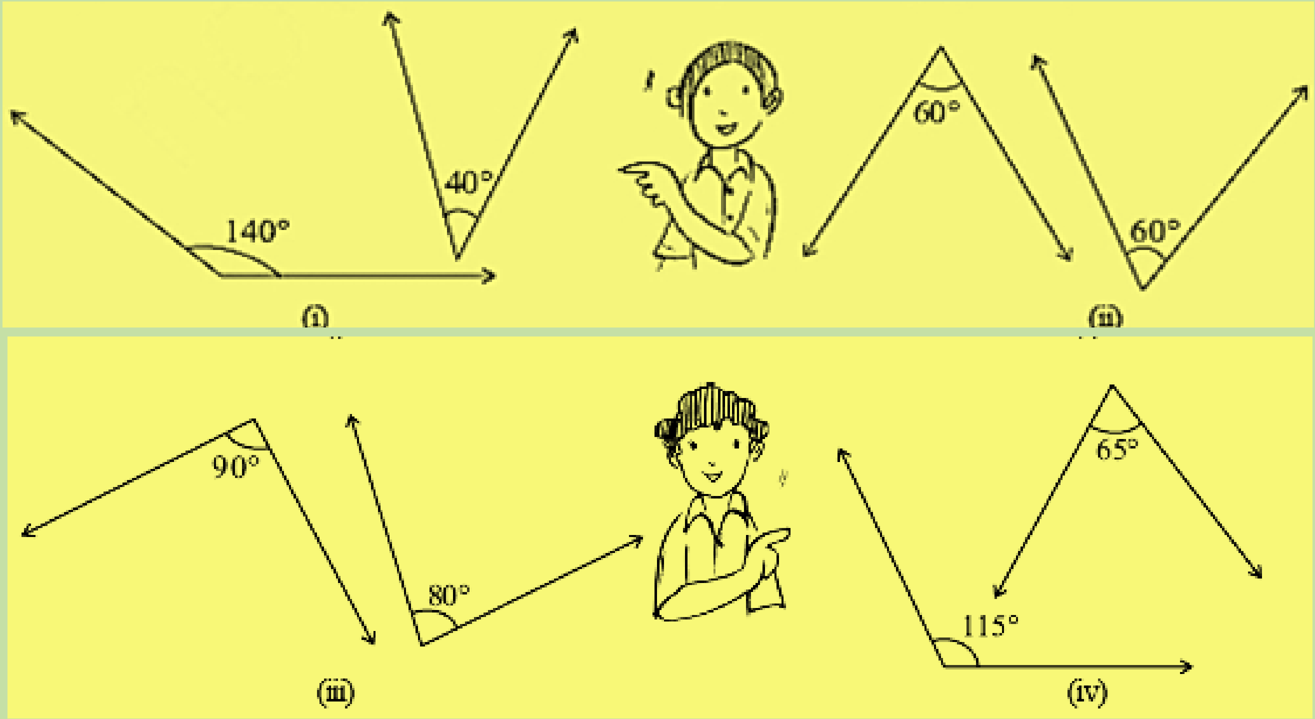
पुनः लेखन्याः आधारम् (आकृतिः 5.12) पश्यन्तु। किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् लेखनी आधारेण सह रैखिकयुग्मं निर्माति ?

विचारयन्तु चर्चयन्तु लिखन्तु च

1. किं द्वौ न्यूनकोणौ एकं रैखिक-युग्मं निर्मातुं शक्नुतः ?
2. किं द्वौ अधिककोणौ एकं रैखिक-युग्मं निर्मातुं शक्नुतः ?
3. किं द्वौ समकोणौ एकं रैखिक-युग्मस्य निर्माणं कर्तुं शक्नुतः ?

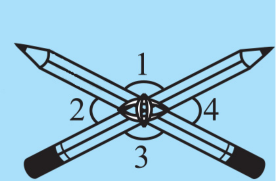
प्रयासं कुर्वन्तु

वदन्तु कोणानां निम्नलिखित-युग्मेषु कतमः रैखिक-युग्मस्य निर्माणं करोति ?(आकृतिः 5.13):



आकृतिः 5.13

5.2.5 उर्ध्वाधराः सम्मुखकोणाः

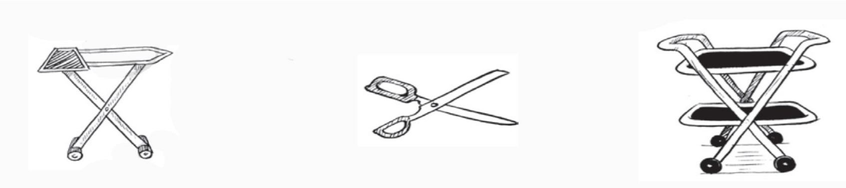


आकृतिः 5.14

अङ्कनीद्वयं स्वीकुर्वन्तु तयोः च मध्यभागात् रबडद्वारा परस्परं बन्धनं कुर्वन्तु यथा 5.14 इति आकृत्यां दर्शितं वर्तते।

अनेन प्रकारेण निर्मितान् $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, तथा च $\angle 4$ चतुरः कोणान् पश्यन्तु।

$\angle 1$, $\angle 3$ एतयोः उर्ध्वाधरौ सम्मुखौ स्तः तथा च $\angle 4$, $\angle 2$ एतयोः उर्ध्वाधरौ सम्मुखौ स्तः।



आकृति 5.15

$\angle 1$, तथा च $\angle 3$ इत्येतौ वयम् उर्ध्वाधरणां सम्मुखकोणानाम् (vertically opposite angles) एकं युग्मं कथयामः।

किं भवन्तः उर्ध्वाधरणां सम्मुखकोणानाम् अन्ययुग्मस्य नाम दातुम् अर्हन्ति ?

किं $\angle 1$ इति $\angle 3$ इत्यस्य समानं दृश्यते ?

किं $\angle 2$ इति $\angle 4$ इत्यस्य समानं दृश्यते ?

एतत् प्रमाणीकर्तुम् आयान्तु सर्वप्रथमं वयम् उर्ध्वाधर-सम्मुखकोणानां कृते वास्तविकजीवनात् कानिचित् उदाहरणानि पश्यामः (आकृतिः 5.15)।

प्रयासं कुर्वन्तु

कस्मिंश्चित् बिन्दौ प्रतिच्छेदं कुर्वत्यौ द्वे l तथा च m इति रेखे आलिखन्तु। अधुना भवन्तः $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ एवञ्च $\angle 4$ इति अङ्कितं कर्तुं शक्नुवन्ति यथा 5.16 इति आकृत्यां दर्शितम् अस्ति। एकस्मिन् पारदर्शिक-कागदे अस्याः आकृतेः एकाम् अनुरेखप्रतिलिपिं स्वीकुर्वन्तु।

तां मूलप्रतेः उपरि तथा स्थापयन्तु येन $\angle 1$ इति निजप्रतिलिपिं आच्छादयेत्, $\angle 2$ इति निजप्रतिलिपिं आच्छादयेत् ,... इत्यादि। प्रतिच्छेदन-बिन्दोः उपरि एकाम् अणिं स्थापयन्तु। प्रतिलिपिम् 180° द्वारा भ्रामयन्तु ? किं रेखाः पुनः सम्पातिन्यः भवन्ति ?

इत्येतं भ्रामयित्वा   इत्येतं प्राप्तुं शक्यते

आकृतिः5.16

वयं प्राप्नुमः यत् $\angle 1$ एवञ्च $\angle 3$ इति कोणौ निज स्थितीः परस्परं परिवर्तयतः इत्थमेव $\angle 2$ तथा च $\angle 4$ अपि निज स्थितीः परस्परं परिवर्तयतः।

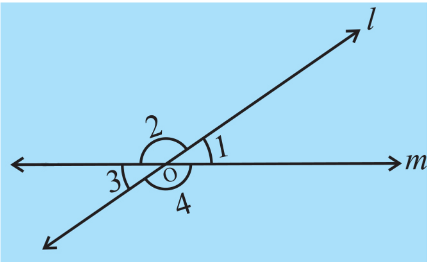
एतत् सर्वं रेखानां स्थितिपरिवर्तनेन विना कृतम्। अनेन प्रकारेण $\angle 1 = \angle 3$ एवञ्च $\angle 2 = \angle 4$ इति अस्ति।

वयम् एतं निष्कर्षं प्राप्नुमःयत् यदि द्वे रेखे अन्योन्यं प्रतिच्छेदं कुर्वतः तदा अनेन प्रकारेण निर्मिताः उर्ध्वाधराः सम्मुखाः कोणाः समानाः भवन्ति।

आयान्तु ज्यामितेः उपयोगं कुर्वन्तः वयं एतत् प्रमाणीकर्तुं प्रयतामहे। आगच्छन्तु l तथा च m इति रेखाद्वयं स्वीकुर्मः (आकृतिः 5.17)। वयं निम्नलिखित-प्रकारेण एतं परिणामं तर्कसंगतयुक्त्या प्राप्तुं शक्नुमः -

चिन्तयन्तु l तथा च m इति रेखाद्वयं वर्तते। ये परस्परम् o इति बिन्दोः उपरि प्रतिच्छेदं कुर्वतः तथा च अनेन प्रकारेण $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ तथा च $\angle 4$ निर्मान्ति।

वयं प्रमाणीकर्तुम् इच्छामः यत् $\angle 1 = \angle 3$ एवञ्च $\angle 2 = \angle 4$



आकृतिः 5.17

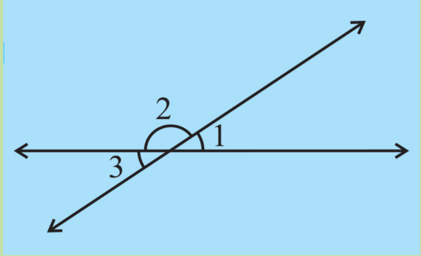
इदानीम् $\angle 1 = 180^\circ - \angle 2$ ($\angle 1$ तथा च $\angle 2$ रैखिकयुग्मं निर्माति अतः $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$)

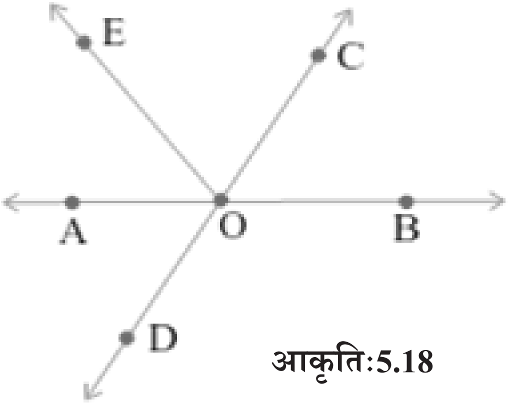
(i) अनेन प्रकारेण $\angle 3 = 180^\circ - \angle 2$ ($\angle 2$, $\angle 3$ रैखिकयुग्मं निर्माति,अतः $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$)

(ii) अतः $\angle 1 = \angle 3$ [(i) तथा च (ii) द्वारा] अनेन प्रकारेण वयं प्रमाणीकर्तुम् अर्हामः यत् $\angle 2 = \angle 4$ (प्रयतताम्)।

प्रयासं कुर्वन्तु

1. दत्तायाम् आकृत्यां यदि $\angle 1 = 30^\circ$ इति अस्ति तदा $\angle 2$ एवञ्च $\angle 3$ ज्ञायताम्
2. निजसमीपस्थानाम् उर्ध्वाधराणां कोणानाम् एकम् उदाहरणं यच्छन्तु।





आकृतिः5.18

उदाहरणम् 15.18 इति आकृत्यां निम्नलिखितानाम् अभिज्ञानं कुर्वन्तु :

(i) आसन्नकोणानां पञ्चयुग्माः

(ii) त्रयः रैखिक-युग्माः

(iii) उर्ध्वाधराणां सम्मुखकोणानां युग्मद्वयम्।

समाधानम्

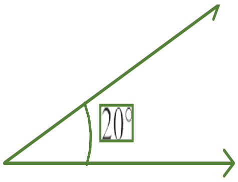
(i) आसन्नकोणानां पञ्चयुग्माः एते सन्ति ($\angle AOE$, $\angle EOC$), ($\angle EOC$, $\angle COB$), ($\angle AOC$, $\angle COB$), ($\angle COB$, $\angle BOD$), ($\angle EOB$, $\angle BOD$)

(ii) त्रयः रैखिकाः युग्माः सन्ति ($\angle AOE$, $\angle EOB$), ($\angle AOC$, $\angle COB$), ($\angle COB$, $\angle BOD$)

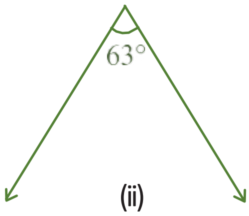
(iii) उर्ध्वाधराः सम्मुखकोणाः सन्ति ($\angle COB$, $\angle AOD$), ($\angle AOC$, $\angle BOD$)

प्रश्नावली 5.1

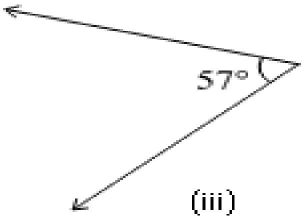
1. निम्नलिखितेषु कोणेषु एकैकस्य पूरकः ज्ञायताम् -



(i)

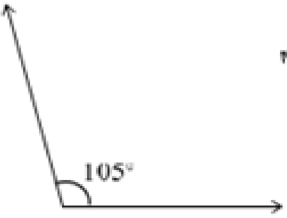


(ii)

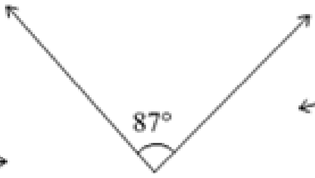


(iii)

2 निम्नलिखितेषु कोणेषु एकैकस्य सम्पूरकः ज्ञायताम् :



(i)



(ii)

(iii)

3. कोणानां निम्नलिखित-युग्मेषु पूरकाणाम् एवञ्च संपूरकाणां पृथक् अभिज्ञानं कुर्वन्तु :

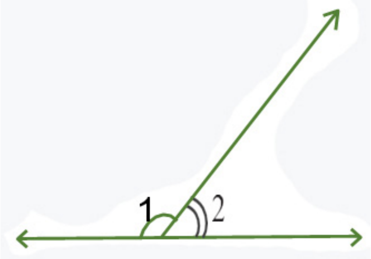
(i) 65°, 115° (ii) 63°, 27° (iii) 112°, 68°

(iv) 130°, 50° (v) 45°, 45° (vi) 80°, 10°

4. एतादृशः कोणः ज्ञातव्यः यः स्वस्य पूरकस्य समानः स्यात्।

5. एतादृशः कोणः ज्ञातव्यः यः स्वस्य संपूरकस्य समानः भवेत्।

6. दत्तायाम् आकृत्याम् $\angle 1$ एवञ्च $\angle 2$ संपूरकौ स्तः। यदि $\angle 1$ इत्यस्मिन् न्यूनता क्रियते तदा $\angle 2$ इत्यत्र किं परिवर्तनं भविष्यति येन द्वौ कोणौ पुनरपि समानौ एव भवेताम्।



7. किम् एतादृशौ कोणौ सम्पूरकौ भवितुं शक्नुतः यदि तयोः द्वौ अपि

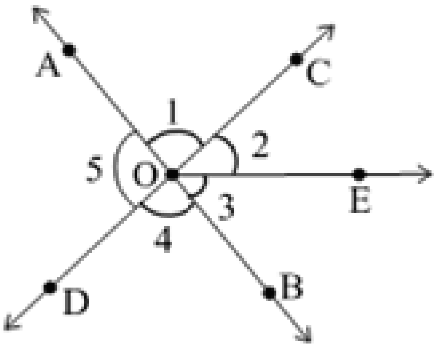
(i) न्यूनकोणौ स्तः

(ii) अधिककोणौ स्तः

(iii) समकोणौ स्तः

8. एकः कोणः 45° इत्यस्माद् अधिकः वर्तते। किम् अस्य पूरककोणः 45° इत्यस्माद् दीर्घः अस्ति अथवा 45° इत्यस्य समानः अथवा 45° अस्मात् लघु अस्ति ?

9. संलग्नायाम् आकृत्याम् -



(i) किम् $\angle 1$ इति कोणः $\angle 2$ इत्यस्य आसन्नः अस्ति ?

(ii) किम् $\angle AOC$ इति कोणः $\angle AOE$ इत्यस्य आसन्नः अस्ति ?

(iii) किम् $\angle COE$ एवञ्च $\angle EOD$ रैखिकयुग्मं निर्मातः ?

(iv) किम् $\angle BOD$ तथा च $\angle DOA$ सम्पूरकौ स्तः ?

(v) किम् $\angle 1$ इत्यस्य उर्ध्वाधरः सम्मुखकोणः $\angle 4$ इति वर्तते ?

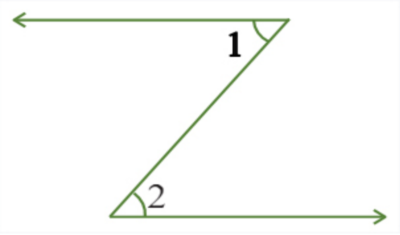
(vi) 5 इत्यस्य उर्ध्वाधरः सम्मुखकोणः कः वर्तते ?

10. अभिज्ञानं कुर्वन्तु यत् कतमाः युग्माः

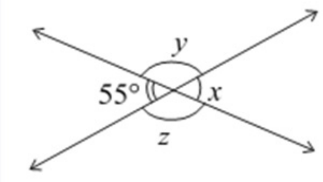
(i) उर्ध्वाधराः सम्मुखकोणाः सन्ति।

(ii) रैखिकयुग्माः सन्ति।

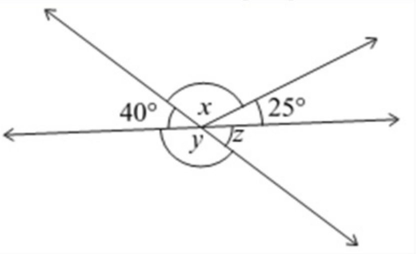
11. निम्नलिखितायाम् आकृत्यां किम् $\angle 1$ इति कोणः $\angle 2$ इत्यस्य आसन्नं वर्तते ? कारणं लिखन्तु।



12 निम्नलिखितेषु प्रत्येकस्मिन् x, y तथा च z इत्येतेषां कोणानां मानं ज्ञातं कुर्वन्तु।



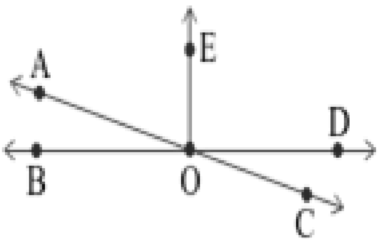
(i)



(ii)

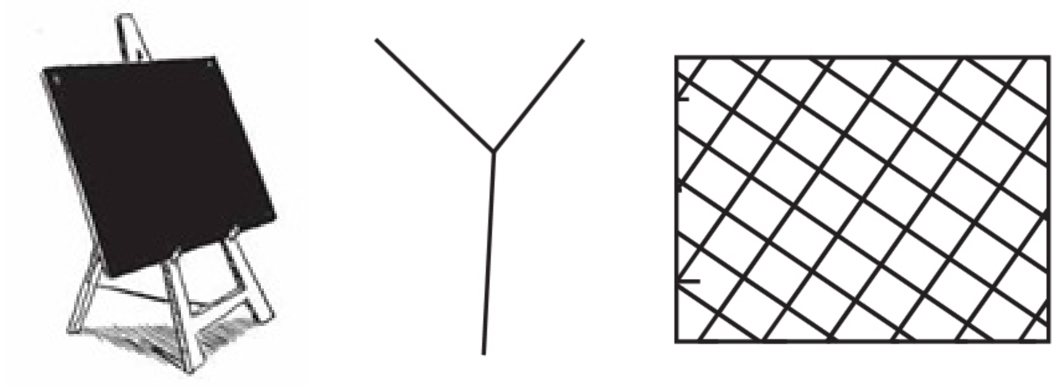
13. रिक्तस्थानानां पूर्तिं कुर्वन्तु :
   (i) यदि द्वौ कोणौ पूरकौ स्तःतदा तयोः मापानां योगः ________ अस्ति।
   (ii) यदि द्वौ कोणौ संपूरकौ स्तःतदा तयोः मापानां योगः ________ अस्ति।
   (iii) रैखिकयुग्मस्य निर्मातारौ द्वौ कोणौ ________________ भवतः।
   (iv) यदि द्वौ आसन्नकोणौ संपूरकौ स्तःतदा तौ____________ निर्मातः।
   (v) यदि रेखाद्वयं परस्परम् एकस्मिन् बिन्दौ प्रतिच्छेदं करोति तदा उर्ध्वाधराः सम्मुखकोणाः सदैव ___भवन्ति।
   (vi) यदि रेखाद्वयं परस्परम् एकस्मिन् बिन्दौ प्रतिच्छेदं करोति यदि च उर्ध्वाधराणां सम्मुखकोणाणाम् एकः युग्मः न्यूनकोणः अस्ति, तदा उर्ध्वाधराणां सम्मुखकोणाणाम् अपरः युग्मः________ अस्ति।

14. संलग्नायाम् आकृत्यां निम्नलिखित-कोणानां कृते नामानि यच्छन्तु :
   (i) उर्ध्वाधरः सम्मुखः अधिककोणः।
   (ii) आसन्नः पूरककोणः।
   (iii) समानः संपूरककोणः।
   (iv) असमानः संपूरककोणः।
   (v) आसन्नाः कोणाः ये रैखिकयुग्मं न निर्मान्ति।



5.3 रेखा-युग्मः

5.3.1 प्रतिच्छेदिन्यः रेखाः



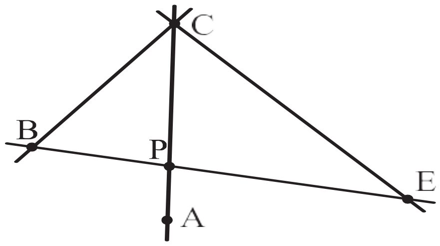
आकृतिः 5.19

आधारे स्थापितं श्यामफलकम्, रेखाखण्डैः निर्मितम् Y इति अक्षरम् एवं च जालिकाद्वारम् (जालक्षद्वारम्) इत्येतेषु सर्वेषु उभयनिष्ठं किम् अस्ति ? एतानि प्रतिच्छेदि-रेखानाम् (intersecting lines) उदाहरणानि सन्ति (आकृतिः 5.19)। द्वे l तथा च m इति रेखे प्रतिच्छेदं कुर्वतः यदि तयोः एकः बिन्दुः उभयनिष्ठः अस्ति। एषः उभयनिष्ठबिन्दुः तयोः प्रतिच्छेदबिन्दुः इति कथ्यते।

विचारयन्तु, चर्चयन्तु लिखन्तु च

5.20 इति आकृत्याम् AC तथा च BE इति रेखे P इति बिन्दौ प्रतिच्छेदं कुर्वतः।
AC एवञ्च BC इति रेखे C इति बिन्दौ प्रतिच्छेदं कुरुतः। AC तथा च EC इति रेखे C बिन्दौ प्रतिच्छेदं कुरुतः। प्रतिच्छेदि-रेखाखण्डानां दश अन्य-युग्मान् ज्ञातुं प्रयासं कुर्वन्तु।

किं रेखाद्वयम् अथवा रेखाखण्डद्वयम् आवश्यकरूपेण प्रतिच्छेदं कुर्यात् ? किं भवन्तः अस्याम् आकृत्यां द्वयोः रेखाखण्डयोः युग्मान् ज्ञातुम् अर्हन्ति यौ प्रतिच्छेदिनौ न स्तः ?
किं द्वे रेखे एकाधिकेषु बिन्दुषु प्रतिच्छेदं कर्तुं शक्नुवन्ति ? अस्मिन् विषये विचारं कुर्वन्तु।



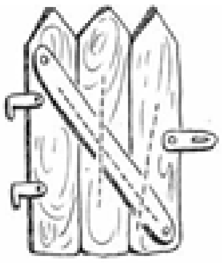
आकृतिः 5.20

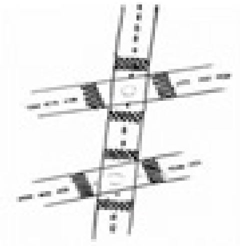
प्रयासं कुर्वन्तु

1. निज-पार्श्वस्थ-परिवेशात् एतादृशानि उदाहरणानि ज्ञातुं प्रयासं कुर्वन्तु यत्र रेखाः समकोणे प्रतिच्छेदं कुर्वन्ति।
2. एकस्य समबाहुत्रिभुजस्य शीर्षेषु प्रतिच्छेदि-रेखाभिः निर्मितकोणानां मापः ज्ञायताम्।
3. एकम् आयतं लिखन्तु प्रतिच्छेदीरेखाभिः चतुर्शीर्षेषु विद्यमानानां कोणानां कोणानां मापः ज्ञायताम्।
4. यदि द्वे रेखे अन्योन्यं प्रतिच्छेदं कुर्वतः, तदा ते सर्वदैव अन्योन्यं समकोणे प्रतिच्छेदं कुर्वतः ?

5.3.2 तिर्यक् छेदि-रेखाः

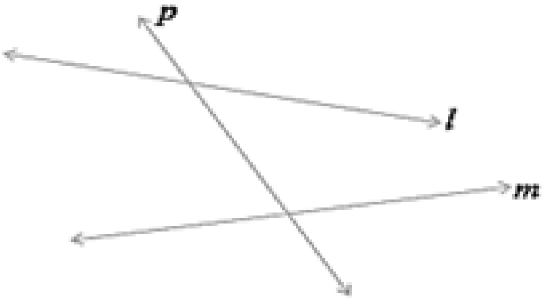
कदाचित् भवद्भिः द्वौ अथवा द्व्याधिकौ राजमार्गौ लङ्घयन् एकः राजमार्गः दृष्टः स्यात् अथवा बहून् रेलमार्गान् लङ्घयन् एकः रेलमार्गः दृष्टः स्यात्। एतैः तिर्यक्-छेदि-रेखानां (transversal) अनुभवः प्राप्यते (आकृतिः5.21)।


(i)

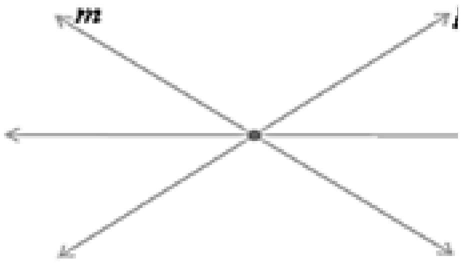

(ii)

आकृतिः 5.21

एका एतादृशी रेखा या द्वयोः अथवा द्व्यधिक-रेखानां भिन्नबिन्दुषु प्रतिच्छेदं करोति, तिर्यक् छेदि-रेखा इति कथ्यते। 5.22 आकृत्यां , p इति रेखा l तथा च m इति रेखयोः तिर्यक्-छेदिरेखा अस्ति।
5.23 आकृत्यां, p एका तिर्यक् रेखा नास्ति यद्यपि एषा l एवञ्च m इति रेखायोः प्रतिच्छेदं करोति। किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति किमर्थम् ?



आकृतिः 5.22



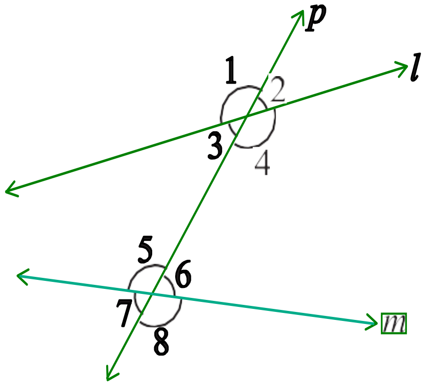
आकृतिः 5.23

प्रयासं कुर्वन्तु

1. चिन्तयन्तु यत् रेखाद्वयं दत्तम् अस्ति। एतयोः कृते भवन्तः कति तिर्यक्-छेदि-रेखाः आलेखितुम् अर्हन्ति ?
2. यदि एका रेखा तिसृणां रेखाणां तिर्यक्-छेदि-रेखा अस्ति तदा सूचयन्तु कति प्रतिच्छेदिबिन्दवः सन्ति ?
3. निजनिकटवर्तीः कतिपयाः तिर्यक्-छेदि-रेखाः अन्वेष्टुं प्रयासं कुर्वन्तु।

5.3.3 तिर्यक-छेदिरेखया निर्मितकोणः

5.24 इति आकृतौ भवन्तः पश्यन्ति यत् l तथा च m इति रेखे p इत्यनया तिर्यक्-छेदिरेखया छिद्यमाना अस्ति। अनेन प्रकारेण एकतः अष्ट पर्यन्तम् अङ्कितानां कोणानां विशिष्ट-नामानि सन्ति।



आकृतिः 5.24

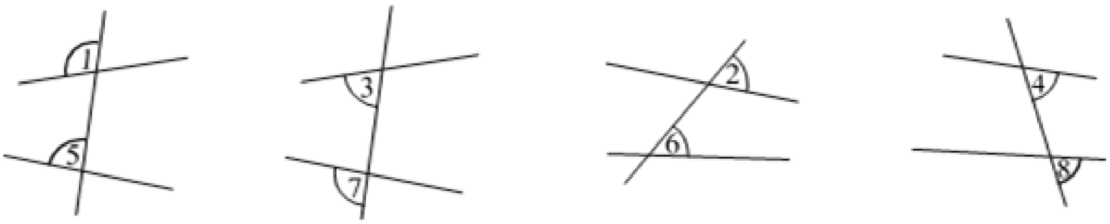
अन्तः कोणः	$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6,$
बाह्यः कोणः	$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$
संगतकोणानां युग्माः	$\angle 1$ तथा च $\angle 5$, $\angle 2$ तथा च $\angle 6$, $\angle 3$ तथा च $\angle 7$, $\angle 4$ तथा च $\angle 8$,
एकान्तराणाम् अन्तःकोणानां युग्माः	$\angle 3$ तथा च $\angle 6$, $\angle 4$ तथा च $\angle 5$,
एकान्तराणां बाह्यकोणानां युग्माः	$\angle 1$ तथा च $\angle 8$, $\angle 2$ तथा च $\angle 7$,
तिर्यक्-छेदीरेखायाः एकस्मिन् एव भागे निर्मितानाम् अन्तःकोणानां युग्माः	$\angle 3$, तथा च $\angle 5$, $\angle 4$ तथा च $\angle 6$,

टिप्पणी- 5.25 इति आकृत्यां $\angle 1$ एवञ्च $\angle 5$ सदृशेषु सङ्गत-कोणेषु निम्नलिखितं सम्मिलितं वर्तते :

(i) विभिन्नानि शीर्षाणि

(ii) तिर्यक्-छेदिरेखायाः एकस्मिन् एव भागे निर्मिताः भवन्ति।

(iii) द्वयोः रेखयोः साक्षेप-संगत-स्थितिषु (उपरिष्टात् अथवा अधस्तात्,वामतः अथवा दक्षिणतः)भवन्ति।



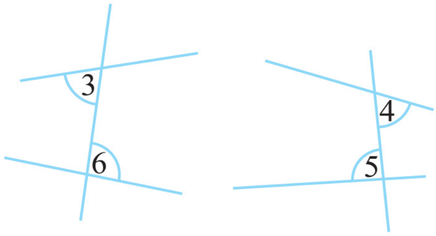
आकृतिः 5.25

5.26 इति आकृत्याम् $\angle 3$ तथा च $\angle 6$ सदृशाः अन्तः एकान्तरकोणाः

(i) एषां विभिन्नानि शीर्षाणि भवन्ति।

(ii) तिर्यक्-छेदिरेखायाः सम्मुख-स्थित्यां निर्मिताः भवन्ति।

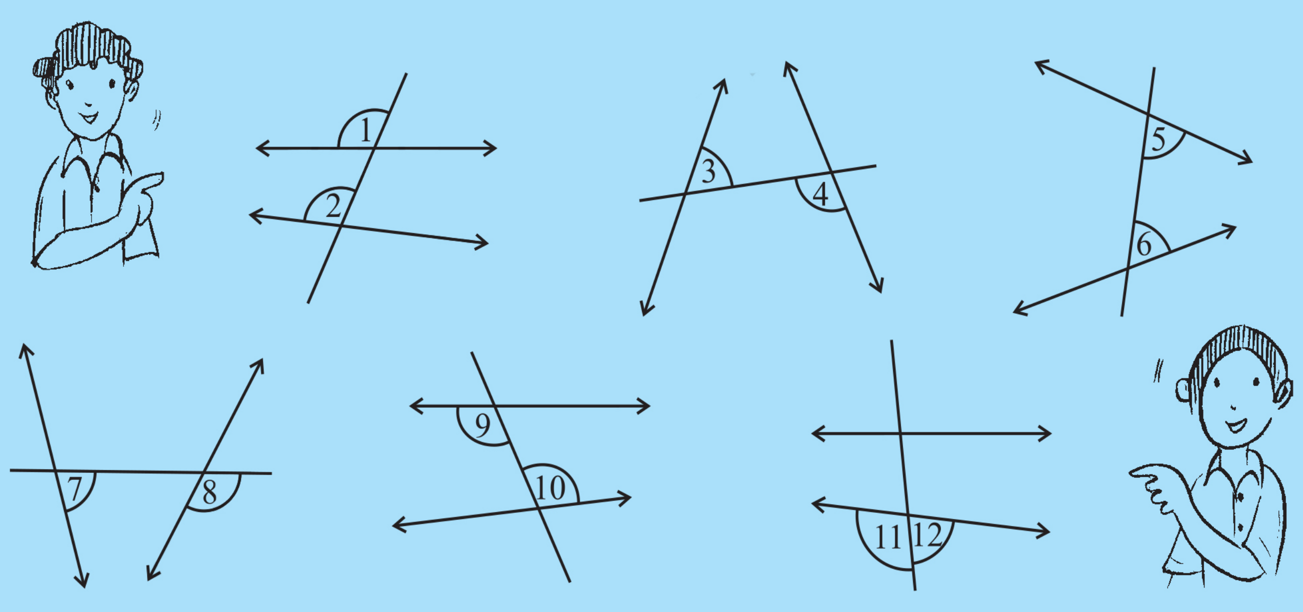
(iii) द्वयोः रेखयोः 'मध्ये' स्थिताः भवन्ति।



आकृतिः 5.26

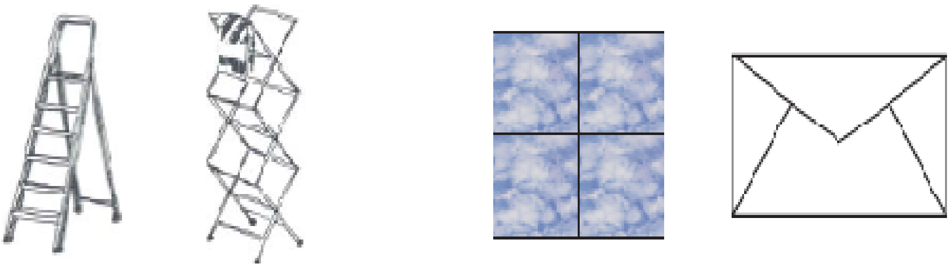
प्रयासं कुर्वन्तु

प्रत्येकम् आकृत्यां कोणयुग्माय नाम यच्छन्तु



5.3.4 समान्तराणां रेखाणां तिर्यक्-छेदिरेखा

भवन्तः स्मरन्ति किं यत् समान्तररेखाः काः सन्ति ? एताः कस्मिंश्चित् तले एतादृश्यः रेखाः भवन्ति याः परस्परं न कुत्रापि मिलन्ति । किं भवन्तः निम्नलिखितासु आकृतिषु समान्तररेखाणाम् अभिज्ञानं कर्तुम् अर्हन्ति (आकृतिः 5.27) ।



आकृतिः 5.26

समान्तररेखाणां तिर्यक्-छेदिरेखातः अतीव रूचिकराः परिणामाः प्राप्यन्ते ।

एतान् कुर्वन्तु

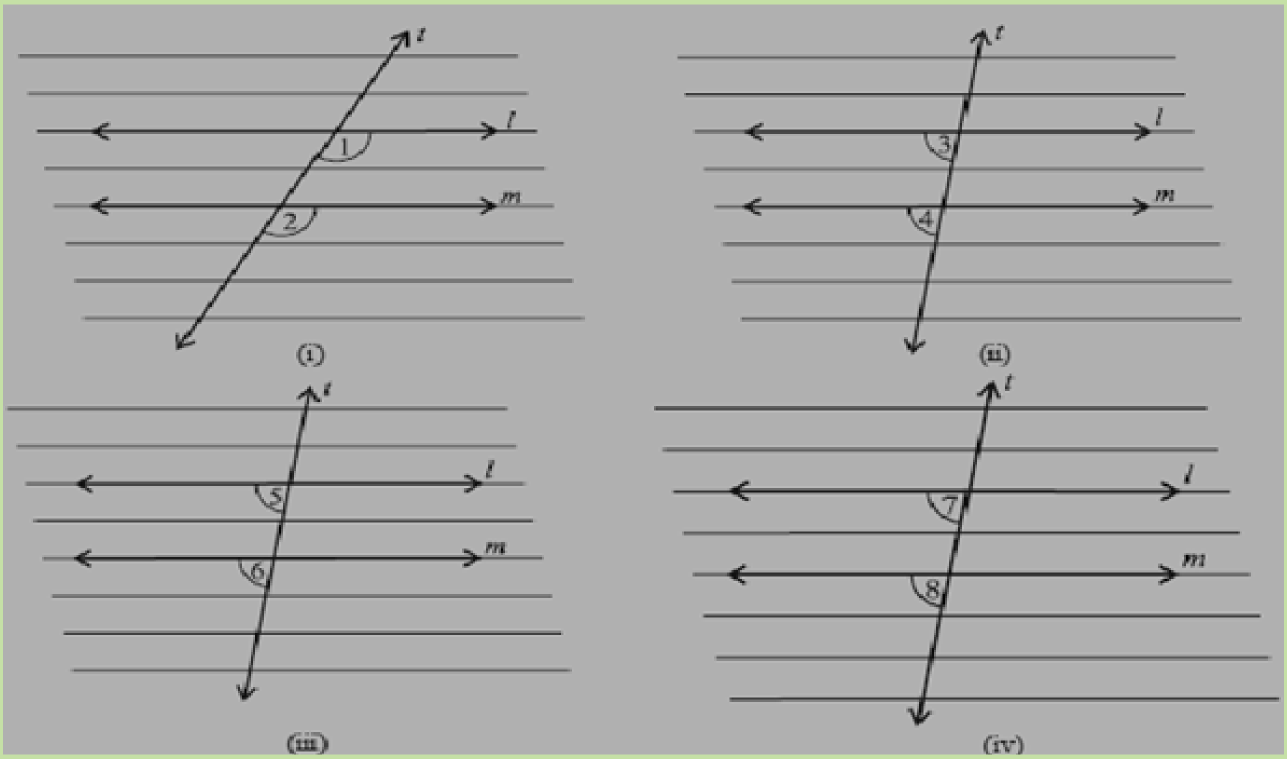
एकं रेखाङ्कितं कागदं स्वीकुर्वन्तु । द्वे स्थूले l तथा च m इति वर्णयुते समान्तररेखे आलिखन्तु ।

l तथा चmइति रेखयोः t इति एकां तिर्यक्-छेदि-रेखाम् आलिखन्तु । $\angle 1$तथा च $\angle 2$ इत्येतौ समरूपौ कुर्वन्तु यथा5.28 (i) इति आकृत्यां दर्शितम् अस्ति। आलिखितायाम् आकृत्याम् एकम् अनुरेखणकागदम् (ट्रेसिंग पेपर)स्थापयन्तु । l, mतथा चtइत्येतासां रेखाणां प्रतिलिपिं निर्मान्तु। अनुरेखणकागदम् t इत्येतम् अनु तावत्पर्यन्तं सारयन्तु यावत्पर्यन्तम् l, m इत्यस्य संपाती न भवेत् ।

भवन्तः प्राप्नुवन्ति यत् प्रतिलिपिकृतायाः आकृत्याः$\angle 1$ इति कोणःमूलाकृत्याः $\angle 2$ इत्यस्य कोणस्य संपाती जायते । वस्तुतः भवन्तः निम्नलिखित-परिणामान् अनुरेखणस्य एवञ्च अपसारणस्य क्रियाकलापेन प्रमाणीकर्तुम् अर्हन्ति ।

(i) $\angle 1 = \angle 2$ (ii) $\angle 3 = \angle 4$ (iii) $\angle 5 = \angle 6$ (iv) $\angle 7 = \angle 8$

एतान् कुर्वन्तु

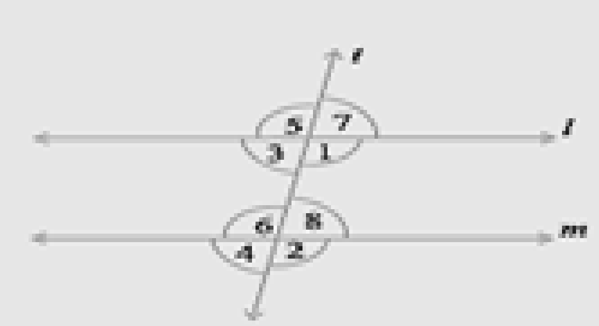


आकृतिः 5.28

एषः क्रियाविधिः निम्नलिखितं तथ्यं स्पष्टीकरोति :

> यदि द्वे समान्तररेखे कयाचित् तिर्यक्-छेदिरेखया छिद्येते तदा सङ्गतकोणानां प्रत्येकं युग्मस्य मापः समानः भवति।

अस्य परिणामस्य उपयोगं कुर्वाणाः वयम् एकम् अन्यं रूचिकरं परिणामं प्राप्नुमः। 5.29 इति आकृतिम् अवलोकयन्तु। यदा l तथा च m इति समान्तररेखाः, t इति रेखया छिद्येते तदा $\angle 3 = \angle 7$ भवति। (उर्ध्वाधरः सम्मुखकोणः)



आकृतिः 5.29

परन्तु $\angle 7 = \angle 8$ (संगतकोणः) अतः, $\angle 3 = \angle 8$

अनेन एव प्रकारेण भवन्तः दर्शयितुम् अर्हन्ति $\angle 1 = \angle 6$.

अतः वयं निम्नलिखितं परिणामं प्राप्नुमः

> यदि द्वे समान्तररेखे कयाचित् तिर्यक्-छेदिन्या रेखया छिद्येते, तदा अन्तः एकान्तरकोणानां प्रत्येकं युग्मः समानः भवति

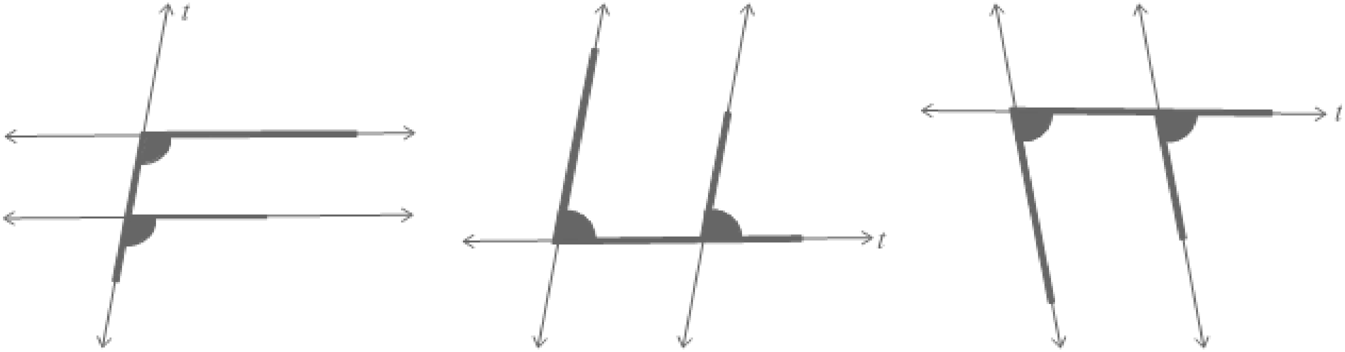
एषः द्वितीयः परिणामः अस्मान् एकम् अन्यरूचिकरं गुणधर्मं प्रति नयति।

पुनः 5.29 इति आकृत्यां दत्तालेखेन, $\angle 3 + \angle 1 = 180°$ ($\angle 3$ तथा च $\angle 1$ इति रैखिकयुग्मं निर्मातः)

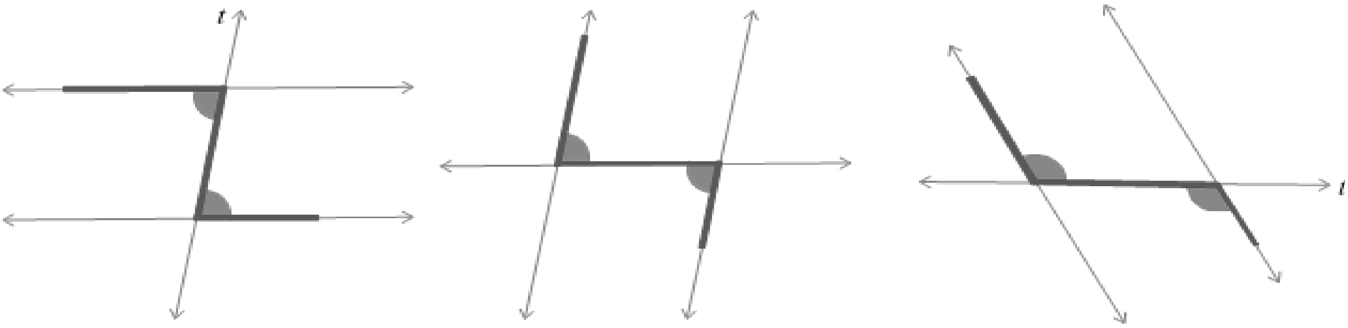
किन्तु $\angle 1 = \angle 6$ (अन्तः एकान्तरकोणयोः एकः युग्मः)
अनेन प्रकारेण वयं वक्तुं शक्नुमः यत् $\angle 3 + \angle 6 = 180°$ ।
इत्थमेव $\angle 1 + \angle 8 = 180°$ अनेन प्रकारेण निम्नलिखित-परिणामस्य प्राप्तिः भवति :

> यदि द्वे समान्तररेखे कयाचित् तिर्यक्-छेदिन्या रेखया छिद्येते तदा तिर्यक् – छेदिन्याः रेखायाः एकस्यामेव दिशि निर्मितकोणानां प्रत्येकं युग्मः सम्पूरकः भवति ।

सुसंगताकृतीः अवधाने स्थापयन्तः भवन्तः एतान् परिणामान् अतीव सरलतया स्मर्तुं शक्नुवन्ति :
संगतकोणानां कृते 'F' इति आकारम् अवधाने स्थापयन्तु



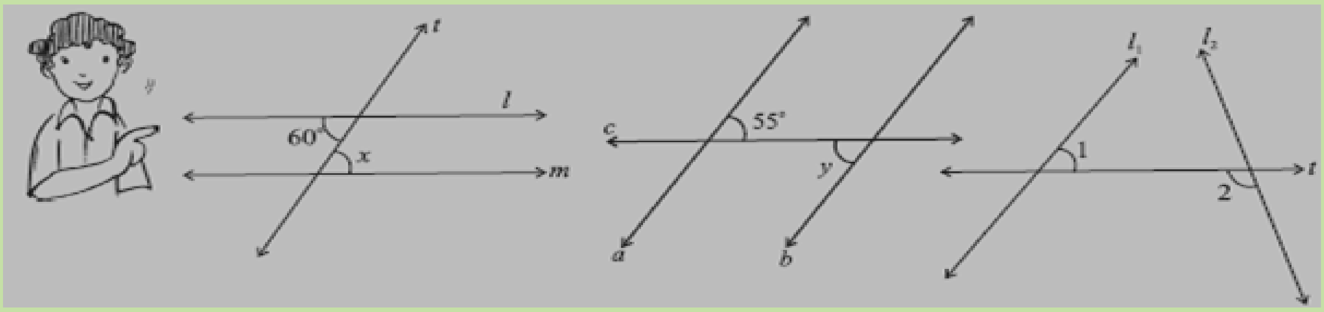
एकान्तरकोणानां कृते 'Z' इति आकारम् अवधाने स्थापयन्तु



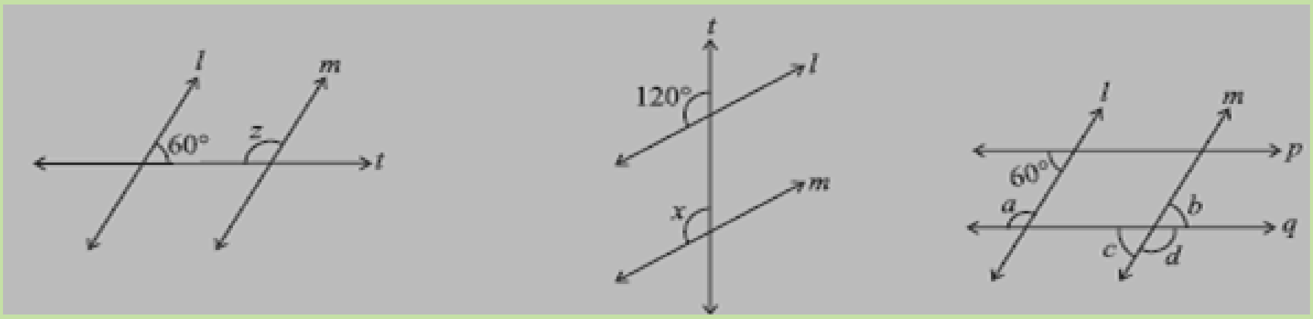
एतान् कुर्वन्तु

समान्तररेखाणाम् एकं युग्मं तथा च एकां तिर्यक्-छेदिरेखाम् आलिखन्तु । कोणान् मापयित्वा उपर्युक्तानां त्रयाणां कथनानां निरूपणं कुर्वन्तु ।

एतान् कुर्वन्तु



$l \parallel m$	$a \parallel b$	l_1, l_2 रेखाद्वयम् अस्ति
t इति एका तिर्यक्छेदिनी रेखा अस्ति ।	c इति एका तिर्यक्छेदिनी रेखा अस्ति ।	t इति एका तिर्यक्छेदिनी रेखा अस्ति
$\angle x = ?$	$\angle y = ?$	किम् $\angle 1 = \angle 2$ इति अस्ति ?

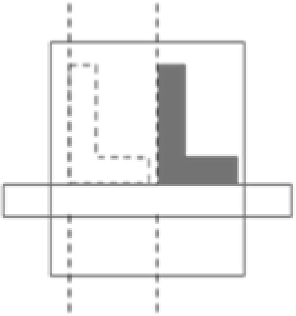


l‖m t इति एका तिर्यक्छेदिनी रेखा अस्ति। ∠z=?	l‖m tइति एका तिर्यक्छेदिनी रेखा अस्ति। ∠x=?	l‖m, p‖q a,b,c,d इति ज्ञायताम्।

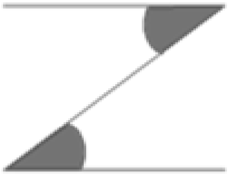
5.4 समान्तररेखाणां परीक्षणम्

भवन्तः जानन्ति यत् यदि द्वे रेखे समान्तरे स्तः तदा एकस्याः तिर्यक्-छेदिन्याः रेखायाः साहाय्येन समान-सङ्गतानां कोणानाम् एकः युग्मः प्राप्यते, समानानाम् अन्तःकोणानाम् एकः युग्मः प्राप्यते तथा च तिर्यक् – छेदिन्याः रेखायाः एकस्यां दिशि निर्मिताः अन्तः कोणाः ये सम्पूरकाः भवन्ति।

यदा द्वे रेखे दत्ते स्तः तदा किं कश्चन एतादृशः विधिः अस्ति यस्य साहाय्येन एतद् अवेक्षणं कर्तुं शक्यते यत् दत्ते रेखे समान्तरे स्तः अथवा न ? जीवनेन सह सम्बधितासु परिस्थितिषु भवतां कृते अस्य कौशलस्य आवश्यकता भवति।



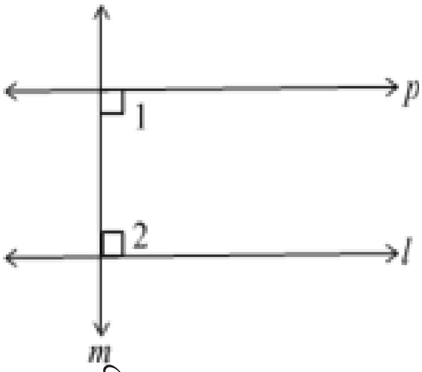
आकृतिः 5.30



आकृतिः 5.31

एतान् खण्डान् (5.30 आकृतिः) आलेखितुम् एकः वास्तुकारः तक्षकस्य वर्गम् एवञ्च मापिकां प्रयुनक्ति। सः अभियोगं करोति यत् एते समान्तराः सन्ति। कथम् ?

भवन्तः किं द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् किं तेन संगतकोणाः समानाः स्थाप्यन्ते ? (अत्र तिर्यक्–छेदिनी रेखा किम् अस्ति?)



आकृतिः 5.32

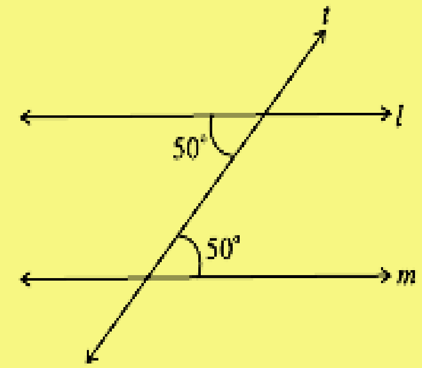
अतः यदा एका तिर्यक्–छेदिनी रेखा द्वे रेखे इत्थं कर्तयति यत् संगतकेणानां युग्माः समानाः भवेयुः तदा रेखाः समान्तराः भवन्ति।

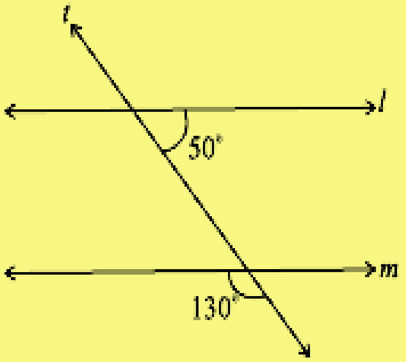
Z इति अक्षरम् (5.31 आकृतिः) पश्यन्तु। अत्र तिर्यक् खण्डः समान्तरः अस्ति यतोहि एकान्तरकोणः समानः अस्ति।

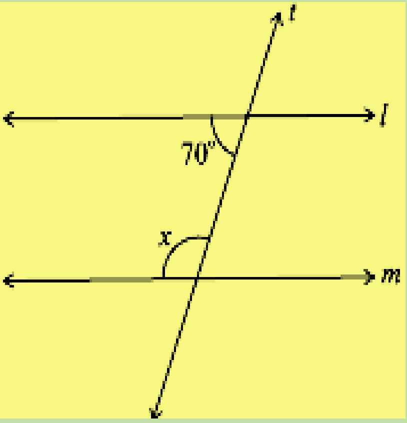
यदा एका तिर्यक् –छेदिरेखा द्वे रेखे इत्थं कर्तयति यत् अन्तःएकान्तरकोणानां युग्मः समानः अस्ति, तदा रेखाः समान्तराः भवन्ति। एकाम् l इति रेखाम् आलिखन्तु। (आकृतिः 5.32)।l इति रेखायाः लम्बवतीम् एकाम् m इति रेखाम् आलिखन्तु। एकां रेखाम् p इत्यत्र तथा आलिखन्तु येन p इति m इत्यस्य लम्बवत् स्यात्। अनेन प्रकारेण p इति l इति रेखायाः लम्बोपरि लम्बः अस्ति। भवन्तः p || l इति प्राप्नुवन्ति कथम् ? एतद् एदर्थम् अस्ति यतोहि भवन्तः p तथा आलिखितवन्तः येन $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ इति अस्ति।

अतः यदा तिर्यक्-छेदिरेखा रेखाद्वयं तथा कर्तयति यथा तिर्यक्-छेदिरेखायाः एकस्यां दिशि निर्मितानाम् अन्तःकोणानां युग्मः सम्पूरकः अस्ति तदा रेखाः समान्तराः भवन्ति।

एतान् कुर्वन्तु







किम्l II mइति अस्ति ? किमर्थम्

किम् l II mइति अस्ति ?

यदि l II mतदाxइति किम् अस्ति ?

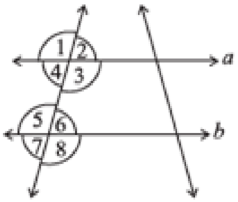
प्रश्नावली 5.2

1. निम्नलिखितकथनेषु प्रत्येकस्मिन् कथने प्रयुक्तस्य गुणधर्मस्य वर्णनं कुर्वन्तु (आकृतिः 5.33)।

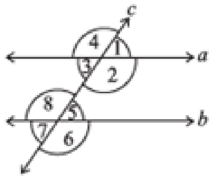
   (i) यदि a || b, तदा $\angle 1 = \angle 5$

   (ii) यदि $\angle 4 = \angle 6$, तदा a || b.

   (iii) यदि $\angle 4 + \angle 5 = 180°$, तदा a || b



आकृतिः 5.33



आकृतिः 5.34

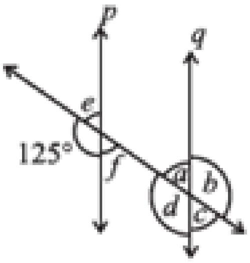
2 5.34 इति आकृत्यां निम्नलिखितानाम् अभिज्ञानं कुर्वन्तु

   (i) सङ्गतकोणानां युग्माः

   (ii) अन्तःएकान्तरकोणानां युग्माः

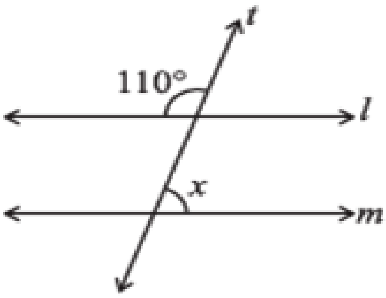
   (iii) तिर्यक्-छेदिन्याः रेखायाः एकस्यां दिशि निर्मितानाम् अन्तःकोणानां युग्माः

   (iv) उर्ध्वाधराः सम्मुखकोणाः।

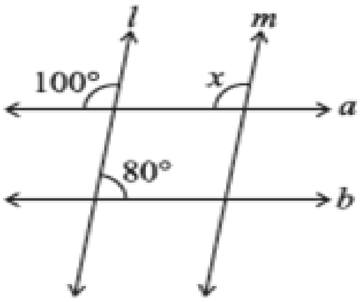


3. संलग्नायाम् आकृत्यां यदि p || q भवेत् तदा अज्ञातकोणान् ज्ञातुं प्रयासं कुर्वन्तु।

4. यदिl || mअस्ति तदा निम्नलिखितासु आकृतिषु प्रत्येकस्मिन् x इत्यस्य मानं ज्ञायताम्

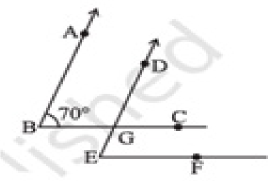


(i)

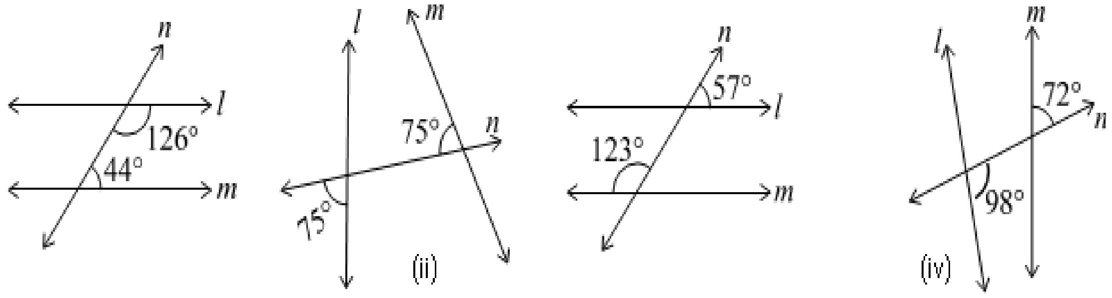


(ii)

5. प्रदत्तायाम् आकृत्यां द्वयोः कोणयोः भुजाः समान्तराः सन्ति । यदि $\angle ABC = 70^o$ भवेत्,तदा
(i)$\angle DGC$ इति ज्ञायताम् ।
($\angle$)$\angle DEF$ इति ज्ञायताम् ।



6. अधोदत्तासु आकृतिषु निर्णयं स्वीकुर्वन्तु यत् किम् l इति m इत्यस्य समान्तरं वर्तते ?



अस्माभिः का चर्चा विहिता ?

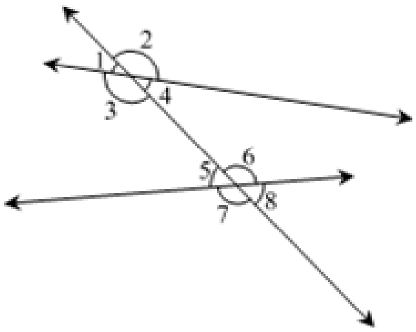
1. वयं स्मरामः यत्
   (i) एकस्य रेखाखण्डस्य द्वौ अन्तबिन्दू भवतः।
   (ii) एकस्य किरणस्य केवलम् एकः एव अन्तबिन्दुः (तस्य शीर्षम्) भवति ।
   (iii) एकस्याः रेखायाःकस्यामपि दिशि कश्चन अपि अन्तःबिन्दुः न भवति ।
2. एकस्य कोणस्य निर्माणः तदा भवति यदा द्वे रेखे (अथवा किरणौ अथवा रेखाखण्डौ) अन्योन्यं मिलतः।

कोणयुग्मः	**प्रतिबन्धः**
द्वौ पूरककोणौ	मापानां योगः 90° अस्ति ।
द्वौ सम्पूरककोणौ	मापानां योगः 180° अस्ति ।
द्वौ आसन्नकोणौ	एकम् उभयनिष्ठशीर्षम् एकञ्च उभयनिष्ठभुजा भवति । किन्तु कञ्चित् अपि उभयनिष्ठम् अन्तस्थः न भवति ।
रैखिकयुग्मः	आसन्नः एवञ्च संपूरकः ।

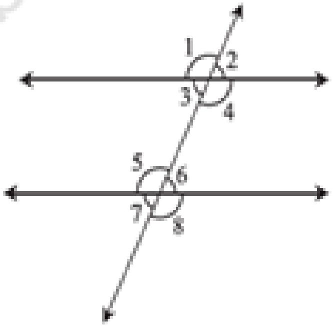
3. यदा l तथा च m इति द्वे रेखे अन्योन्यं मिलतः तदा वयं वदामः यत् एते रेखे प्रतिच्छेदं कुरुतः । मेलनबिन्दुः प्रतिच्छेदबिन्दुः इति कथ्यते । एतादृश्यः रेखाः याः यावदपि वर्धयामः अन्योऽन्यं न मिलन्ति समान्तररेखाः इति कथ्यन्ते ।
4. (i) यदा रेखाद्वयं प्रतिच्छेदं करोति (सामान्यतः'X'इति अक्षरमिव दृश्यते) तदा वयं सम्मुखकोणानां युग्मद्वयं प्राप्नुमः । एते उर्ध्वाधराः सम्मुखकोणाः इति कथ्यन्ते । एतेषां मापः समानः भवति ।
   (ii) द्वयोः अथवा द्व्यधिक-रेखाणां विभिन्नबिन्दुषु प्रतिच्छेदं कुर्वती रेखा तिर्यक्-छेदिरेखा इति कथ्यते ।
   (iii) एकतिर्यक्–छेदिरेखायाः आलेखनं विभिन्नप्रकारकाः कोणाः प्राप्यन्ते ।
   (iv) आकृत्यां वयं प्राप्नुमः

कोणानां प्रकाराः	**दर्शयितारः कोणाः**
अन्तः	$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$
बाह्यः	$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$

संगतः	$\angle 1$ तथा च $\angle 5$, $\angle 2$ एवञ्च $\angle 6$ $\angle 3$ तथा च $\angle 7$, $\angle 4$ एवञ्च $\angle 8$
अन्तः एकान्तरः	$\angle 3$ तथा च $\angle 6$, $\angle 4$ एवञ्च $\angle 5$
बाह्यः एकान्तरः	$\angle 1$ तथा च $\angle 8$, $\angle 2$ एवञ्च $\angle 7$
तिर्यक्-छेदिन्याः रेखायाः एकस्यां दिशि निर्मिताः कोणाः	$\angle 3$ तथा च $\angle 5$, $\angle 4$ एवञ्च $\angle 6$



(v) यदा एका तिर्यक्-छेदिरेखा द्वयोः समान्तररेखयोः प्रतिच्छेदं करोति तदा वयं निम्नलिखितान् रूचिकरसम्बन्धान्प्राप्नुमः । सङ्गत-कोणानां प्रत्येकं युग्मः समानः भवति।



$\angle 1 = \angle 5$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 8$

अन्तः एकान्तरः कोणानां युग्माः समानाः भवन्ति $\angle 3 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 5$

तिर्यक्–छेदिरेखायाः एकस्यां दिशि निर्मितानाम् अन्तःकोणानां प्रत्येकं युग्मः सम्पूरकः भवति

$\angle 3 + \angle 5 = 180°$, $\angle 4 + \angle 6 = 180°$